

2019年天津和平区天津市耀华中学高三二模理科数学试卷

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 若 i 为虚数单位，则 $\frac{1-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+i} = ()$.

A. $1+i$ B. $1-i$ C. i D. $-i$

2. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3y \geq 4 \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$ ，则 $z=2x-y$ 的最大值是 $()$.

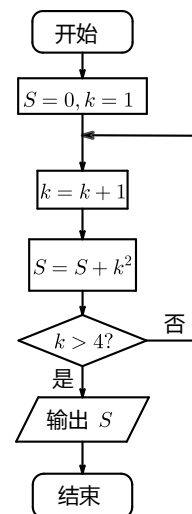
A. 1

B. $\frac{4}{3}$

C. 4

D. 2

3. 阅读如图的框图，则输出的 $S = ()$.



A. 30

B. 29

C. 55

D. 54

4. 设 $a = \log_4 12$, $b = \log_5 15$, $c = \log_6 18$, 则 $()$.

A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

5. 已知 $f(x) = 2x + 3 (x \in \mathbf{R})$, 若 $|f(x) - 1| < a$ 的必要条件是 $|x + 1| < b (a, b > 0)$, 则 a, b 之间的关系是 $()$.

A. $b < \frac{a}{2}$ B. $b \geq \frac{a}{2}$ C. $a \leq \frac{b}{2}$ D. $a > \frac{b}{2}$

6. 函数 $f(x) = 3 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right)$ 的一个单调递增区间是 $()$.

A. $\left[\frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \right]$ B. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right]$ C. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ D. $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , P 是抛物线 E 上位于第一象限内的任意一点， Q 是线段 PF 上的点，且满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$, 则直线 OQ 的斜率的最大值为 $()$.

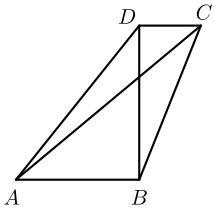
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{3}$

C. 1

D. $\sqrt{2}$

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{DC}| = 4$, $|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{DC}| = 4$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, 则 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值

为（ ）.

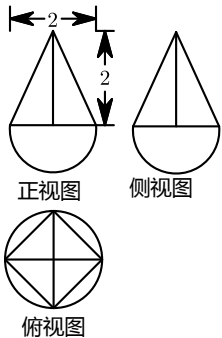


- A. 2
- B. $2\sqrt{2}$
- C. 4
- D. $4\sqrt{2}$

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

9. 已知集合 $A = \{x|(x + 2)(x - 5) > 0\}$, $B = \{x|m \leq x < m + 1\}$, 且 $B \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} A)$, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

10. 一个由棱锥和半球体组成的几何体，其三视图如图所示，则该几何体的体积为 _____ .



11. 在平面直角坐标系中，以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1$, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = -\sqrt{3} + 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 、求直线 l 与圆 C 相交所得弦长为 _____ .

12. 用 1 , 2 , 3 , 4 这四个数字组成无重复数字的四位数，其中恰有一个偶数字夹在两个奇数字之间的四位数的个数为 _____ .

13. 已知实数 x , y 满足 $x^2 + y^2 = 3$, $|x| \neq |y|$, 则 $\frac{1}{(2x + y)^2} + \frac{4}{(x - 2y)^2}$ 的最小值为 _____ .

14. 设 $a \neq 0$, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ae^x + (a - 1)x, & x \leq 0 \\ x^2 + a, & x > 0 \end{cases}$ 与函数 $y = ax$ 有交点，且交点横坐标之和不大于 6 , 求 a 的取值范围 _____ .

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 且满足 $a \cos C = b - \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

- (1) 求角 A 的大小 .
- (2) 若 $B = \frac{\pi}{6}$, $b = 4$, 求 BC 边上的中线 AM 的长 .

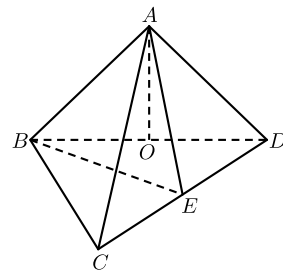
16. 为促进义务教育的均衡发展，各地实行免试就近入学政策，某地区随机调查了 50 人，他们年龄的频数分布及赞同 “就近入学” 人数如表：

年龄	[5, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)
频数	5	10	15	10	5	5
赞同	4	5	12	8	2	1

- (1) 在该样本中随机抽取 3 人，求至少 2 人支持 “就近入学” 的概率 .

- (2) 若对年龄在 $[5, 15)$, $[35, 45)$ 的被调查人中各随机选取2人进行调查, 记选中的4人支持“就近入学”人数为 X , 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

17. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 顶点 A 在底面 BCD 上的射影 O 在棱 BD 上, $AB = AD = \sqrt{2}$, $BC = BD = 2$, $\angle CBD = 90^\circ$, E 为 CD 的中点.

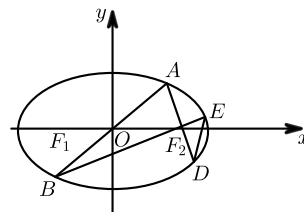


- (1) 求证: $AD \perp$ 平面 ABC .
- (2) 求二面角 $B-AE-C$ 的余弦值.
- (3) 已知 P 是平面 ABD 内一点, 点 Q 为 AE 的中点, 且 $PQ \perp$ 平面 ABE , 求线段 PQ 的长.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $a_1 = 1$ 且 $S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 0$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 求证: 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $\frac{1}{1-S^2} \cdot \frac{1}{1-S_3} \cdots \frac{1}{1-S_{n+1}} > \sqrt{n+1}$ 成立.

19. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 在椭圆上, $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{5} + 4$, 面积的最大值为2.



- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 直线 $y = kx$ ($k > 0$) 与椭圆 C 交于 A, B , 连接 AF_2, BF_2 并延长交椭圆 C 于 D, E , 连接 DE . 探索 AB 与 DE 的斜率之比是否为定值并说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = e \ln x - ax$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax$ (e 为自然对数的底).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 若存在均属于区间 $[1, 3]$ 的 x_1, x_2 , 且 $x_1 - x_2 \geq 1$, 使 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $e \ln \frac{3}{2} \leq a \leq e \ln 2$.
- (3) 对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域的任意实数 x , 若存在常数 k, b , 使得 $f(x) \leq kx + b$ 和 $g(x) \geq kx + b$ 都成立, 则称直线 $y = kx + b$ 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的分界线, 试探究当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否存在“分界线”? 若存在, 请给予证明, 并求出 k, b 的值, 若不存在, 请说明理由.

爱智康

爱智康

爱智康